Topologia 2 - odwzorowania

Na podstawie: Walter Rudin, Podstawy analizy matematycznej, PWN 1996

15.X.2014r.

Definicja (D1). Weźmy zbiory X i Y. Każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkujmy dokładnie jeden $y \in Y$ i oznaczany również symbolem $f(x)$. Wówczas takie przyporządkowanie nazywa się funkcją (lub odwzorowaniem).

$f(x)$ nazywamy wartością funkcji w punkcie *x; x* nosi nazwę argumentu funkcji. Samo odwzorowanie oznaczamy symbolem $f(\cdot)$. Piszemy także: *f*: X→Y.

Definicja (D1.2). Odwzorowanie $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy ciągiem (rzeczywistym).

Argument ciągu nazywamy indeksem. Ciąg a(·) oznaczamy symbolem (a_n), a jego wartość dla liczby *n*: a_n.

Definicja (D2). Jeśli $\forall x_1, x_2 \in X: \; x_1 \neq x_2 \;\Leftrightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$, to mówimy, że *f* jest różnowartościowa (jest iniekcją) w zbiorze X.

Czytelnik poda przykłady funkcji różnowartościowej oraz nieróżnowartościowej, oraz wykona bardzo proste

Ćwiczenie (C1). Niech dana będzie funkcja id_X, taka, że $\forall x \in X:$ $id_X(x) := x$. Proszę sprawdzić, że jest ona różnowartościowa w X.

Definicja (D3). Funkcję X→X taką jak w C1, *f*(*x*) := *x*, nazywamy identycznością (funkcją tożsamościową).

Definicja (D4). Niech *f*(E) oznacza zbiór wartości funkcji *f* dla każdego $x \in E \subset X$. Mówimy, że *f*(E) jest obrazem zbioru E w odwzorowaniu *f*, lub prościej: *f*-obrazem zbioru E.

Ćwiczenie (C2), czas: 5 minut. Podać obrazy zbioru $\mathbb{R}^+$ dla funkcji ln x, $x^{1/2}$, $-x^2+2$, |x+2|, [x], sgn(x).

Ćwiczenie (C3), czas: 5 minut. a) Jak nazywa się funkcja, której obrazem jest zbiór jedno-elementowy? b) Czy istnieją takie funkcje (i dlaczego), których obrazem jest zbiór pusty? c) Podać przykład (zaproponować wzór) funkcji, której obrazem będzie zbiór złożony z dokładnie 2 elementów.

Ćwiczenie (C4), czas: 5 minut. Skonstruować wzór funkcji |x|, mając do dyspozycji funkcję tożsamościową oraz te wymienione w C2 oprócz |x|.

Definicja (D5). Jeśli dla *f*: X→Y, obraz *f*(X) = Y, to mówimy, że *f* jest odwzorowaniem „na” Y (albo, że jest suriekcją).

Czytelnik poda przykład odwzorowania na każdy z wymienionych zbiorów: $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+$.

Wniosek (W1). Odwzorowanie różnowartościowe, które jest „na” (czyli: które jest suriektywną iniekcją), łączy elementy zbiorów X i Y w nie dające się pomylić (unikalne) pary różnych *x* z różnymi *y*, zaś każdy *x* i każdy *y* zostaje przypisany do którejś z par.

Zadaniem Czytelnika jest rozważenie istnienia i podanie przepisu na funkcję *g* skierowaną w odwrotną stronę, tj. *g*: Y→X.

Definicja (D6). Funkcję różnowartościową, która jest „na”, nazywamy funkcją odwracalną lub „1:1 odpowiedniością” (dla podkreślenia istnienia owych unikalnych par x, y, o których była mowa w W1), albo bijekcją.

Natomiast o zbiorach X i Y, pomiędzy którymi istnieje bijekcja (nie trzeba mówić, z którego zbioru w który – dlaczego?), powiemy, że są *równoliczne* i relację tę oznaczymy X ~ Y.

Dwa zbiory równoliczne, które są skończone, mają tyle samo elementów (mają jednakową moc).

Ćwiczenie (C5), czas: 3 minuty. Podać przykład dwóch zbiorów 5-elementowych i zdefiniować bijekcję pomiędzy nimi. Wskazać funkcję odwrotną.

Wniosek (W2). Relacja ~ jest a) zwrotna, b) symetryczna, c) przechodnia. Jest zatem relacją równoważności.

Czytelnik naturalnie przeprowadzi dowód a), b) i c) oraz przypomni co to znaczy, że relacja równoważności rozbija wszystkie zbiory na rozłączne klasy (tzw. klasy abstrakcji względem ~).

Szablon: równoważność grupuje wszystkie możliwe zbiory liczbowe w kolekcje. W każdej kolekcji …, a dowolne dwie kolekcje … . Tym, co je odróżnia, jest …, czyli właśnie relacja „bycia równolicznym z” .

Definicja (D7). Niech *f:* X→Y; *g:* Y→Z. Funkcję *h*: X→Z: *h*(*x*) := *g*(*f*(*x*)) nazywamy złożeniem (superpozycją) funkcji *f* z funkcją *g* i oznaczamy $g \circ f(x)$.

Czytelnik w tym miejscu, w czasie 5 minut, naszkicuje wykres funkcji, będącej superpozycją *wartości bezwzględnej* oraz funkcji liniowej (·) - 1. A następnie wykres superpozycji tych samych funkcji, ale w odwrotnym porządku.

Definicja (D6.2). Funkcję $g(\ y \in Y\ )$ o wartościach $x \in X$ takich, że $f(x) = y$, nazywamy funkcją odwrotną do f i oznaczamy symbolem $f^{-1}(y)$. Oczywiście, $f^{-1}(\ f(\ x\ )\ ) = x$, tzn. $f^{-1} \circ f\,(\ \cdot\ ) = \mathrm{id}_X\,(\ \cdot\ )$.

Oczywisty **Fakt (W3).** Swoje funkcje odwrotne $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ mają wyłącznie funkcje „1:1” $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$.

Czytelnik wyjaśni, dlaczego.

Definicja (D8). Zbiór $f^{-1}(\mathrm{E}) \subset X$, który zawiera wszystkie te x, dla których $f(\ x\ ) \in E \subset Y$, nazywamy przeciwobrazem zbioru E w odwzorowaniu f, lub, krócej, f-przeciwobrazem zbioru E.

Ćwiczenie (C6). a) Określić przeciwobraz {1} w odwzorowaniu $f(\ x\ ) := \sin x$, a następnie w odwzorowaniu $g(\ x\ ) := x^2$. b) Wykorzystać D8, aby sformułować definicję miejsc zerowych danej funkcji f. c) W przypadku, gdy pewna f: $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ jest bijekcją, a jej funkcją odwrotną jest g, jak inaczej można ująć f- przeciwobraz danego zbioru E?

Ćwiczenie (C7). Powróćmy do ćwiczenia C5. Podać a) obraz i b) przeciwobraz wybranych, dowolnych 3 elementów odpowiedniego zbioru.

Definicja (D9). Oznaczmy przez $\mathbb{N}_n$ podzbiór liczb naturalnych mniejszych od $n+1$. Wówczas, jeśli $\exists n\colon\ E \sim \mathbb{N}_n$, powiemy, że E jest skończony. Zbiór, który nie jest skończony, nazywamy nieskończonym.

Jeśli zbiór $E \sim \mathbb{N}$, to powiemy, że E jest przeliczalny. Zbiór nieskończony, który nie jest przeliczalny, nazywamy nieprzeliczalnym.

Fakt (W4). $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ są nieskończone i przeliczalne. (Oczywiście są zatem równoliczne. Jak widać, zbiór może być równoliczny ze swoim podzbiorem.) Zbiorem $\mathbb{Q}$ zajmiemy się w W8.

Czytelnik w ciągu 10 minut poda przykład ciągu, który jest bijekcją konstytuującą relację $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$, a który można zapisać za pomocą konkretnego wzoru, i poda ten wzór.

Stwierdzenie (W5) dotyczący superpozycji D7. Superpozycja bijekcji jest bijekcją.

Dowód W5 jest bardzo prosty. Niech h :=: $g \circ f$, $\mathrm{X} \xrightarrow{f} \mathrm{Y} \xrightarrow{g} \mathrm{Z}$. Zachodzi różnowartościowe, czyli jednoznaczne powiązanie $x \to y \to z$ i na mocy suriektywności g, cały zbiór Z jest wykorzystany. W konsekwencji, h jest iniektywne i suriektywne, jest więc bijekcją. □

Wniosek (W6). Podciąg jest ciągiem, bo jest superpozycją bijekcji $\mathbb{N} \to$ *podzbiór* $\mathbb{N}$ i ciągu wyjściowego.

Proszę udowodnić następujące

Stwierdzenie (W7). a) Podzbiór zbioru przeliczalnego może być jedynie skończony, albo przeliczalny. b) Przeciwnie, suma dwóch (a zatem i dowolnej skończonej liczby) zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna.

Wskazówka Ad a) Wykorzystać fakt W6, że podciąg jest ciągiem.

Spoiler – rozwiązanie:

Ad a) Ze zbioru przeliczalnego U wybierzmy podzbiór nieskończony V. Zbiór U można zorganizować w ciąg (bo jest przeliczalny), nazwijmy ów ciąg (u_n). Wybór podzbioru V jest równoznaczny z usunięciem pewnej (być może nieskończonej) liczby wyrazów tego ciągu; powstaje w ten sposób podciąg (v_n). Zaś podciąg ciągu jest ciągiem. Wystarczy zatem zebrać parami kolejne wyrazy ciągu (u_n) i (v_n) – pierwszy z pierwszym, drugi z drugim, etc. - aby przekonać się, że ciągi te są równoliczne. Zaś relacja równoliczności ~ jest przechodnia (W2). Równoliczne są zatem: zbiór U i jego podzbiór nieskończony V. □

Doprawdy, zbiory przeliczalne można nawet zdefiniować w ten sposób, że ich podzbiory nieskończone są równoliczne z nimi samymi.

Ad b) Oba zbiory, A i B, ustawmy w ciągi (a_n) oraz (b_m). Następnie stwórzmy trzeci ciąg (c_k), mający naprzemiennie wartości z A i B: a_1, b_1, a_2, b_2, … . Ciągi nieskończone są równoliczne, rozumujemy tak samo jak w a). □

Twierdzenie (T1). Suma nieskończona zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna. Innymi słowy, zbiór S, stanowiący sumę wszystkich możliwych zbiorów przeliczalnych, czyli rodziny zbiorów przeliczalnych, jest przeliczalny.

Dowód T1 pochodzi od Cantora, twórcy Teorii Mnogości. Należy poustawiać wszystkie elementy zbioru S w następującą tabelkę, w której każdy kolejny wiersz jest jednym elementem zbioru S – zbiorem przeliczalnym, którego elementy zajmują kolejne kolumny tego wiersza:

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Kolumn jest zatem tyle samo, co liczb naturalnych (każdy zbiór z S jest przeliczalny). Wyrazy a_{ij} mogą póki co się powtarzać.

Wystarczy zaproponować jakikolwiek przepis na ustawienie wyrazów tabelki w kolejności, wówczas okaże się ona równoliczna ze zbiorem liczb naturalnych, czyli przeliczalna. Przykładowo, można, rozpoczynając od lewego górnego rogu, iść „po jodełce”: w prawo o 1, potem na skos w lewo i w dół aż do brzegu; potem w dół o 1, następnie w górę i w prawo aż do brzegu, następnie w prawo o 1 i procedura zaczyna się powtarzać.

Napotykane po kolei elementy układamy w ciąg. W ten sposób uwzględnimy wszystkie elementy (nie pominiemy żadnego) i każdy z nich doczeka się, wcześniej czy później, swojej kolejności.

Na koniec pozbywamy się jednakowych wyrazów tego ciągu. W rezultacie otrzymujemy podciąg, który jest tak samo ciągiem. Ustawiliśmy wszystkie (unikalne) elementy zbioru S w ciąg, a to dowodzi przeliczalności S. □

Twierdzenie (T2). Niech A będzie zbiorem przeliczalnym, a *n* – dowolną liczbą naturalną. Zbierzmy w kolekcję (zbiór) C_n wszystkie możliwe ciągi skończone *n*-elementowe, które mają wartości z A, czyli $\forall k \in [1;n]:\ a_k \in A$. Wówczas zbiór tych ciągów jest przeliczalny.

Dowód T2 opiera się na zasadzie Indukcji. Po pierwsze, gdy $n = 1$, to $C_1 \sim \mathbb{N}$.

Następnie, udowodnimy, że z faktu, że przeliczalny jest zbiór C_k, wynika przeliczalność zbioru C_{k+1}. Ustawmy elementy zbioru C_k w ciąg c^k_n.

Do pierwszego ciągu, c^k_1 dołóżmy na jego koniec, czyli na pozycji $k+1$, jeden dowolny wyraz z A. Powstałych w ten sposób ciągów dłuższych o jeden element jest dokładnie tyle, co elementów zbioru A, czyli tyle, co liczb naturalnych. Jest to więc zbiór przeliczalny. Nazwijmy go B_1.

Gdy postąpimy analogicznie z drugim ciągiem z C_k, tj. z c^k_2, otrzymamy znów zbiór przeliczalny B_2 nowych, dłuższych o 1 ciągów. Postępując tak z każdym kolejnym ciągiem z C_k, uzyskujemy analogiczny zbiór przeliczalny B_i.

A przecież zbiór C_{k+1} jest sumą nieskończoną zbiorów B_i: $C_{k+1} = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$. Na mocy T1 jest zatem przeliczalny. □

Wniosek (W8). Zbiór wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny.

Dowód W6 pozostawiamy w rękach Czytelnika, w tym skorzystanie z T2 dla $n = 2$.